## Литература


1. Нахушев А.М. *О задаче Дарбу для гиперболических уравнений* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195. – № 4. – С. 776–779.

2. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. Раджабов Н. *Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линей или сингулярными поверхностями.* Учебное пособие по спецкурсу, ч.4. – Душанбе, 1985. – 147 с.

4. Раджабов Н. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами.* – Душанбе: Изд. ТГУ, 1992. – 236 с.

5. Шамсудинов Ф.М. *Интегральные представления решений и граничные задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной коэффициентами* // ДАН РТ. – 2001. – Т. 44. – № 3-4. – С. 25–30.

6. Вирченко Н.А., Шамсудинов Ф.М. *Интегральные представления решений и граничные задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной точкой* // ДАН Украины. – 2003. – № 1. – С.17–22.


INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS FOR A SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH A SUPERSINGULAR POINT

F.M. Shamsudinov

*In this paper, for a hyperbolic equation of the second order with a supersingular point, we obtain representations of the set of solutions by means of two arbitrary functions of one independent variable, the properties of the solutions obtained are studied, and also the boundary value problem A is investigated.*

Keywords: integral representations, hyperbolic equation, set of solutions, rectangle, solution properties, boundary value problem.

УДК 517.52

# О НЕКОРРЕКТНОСТИ ПРИЗНАКА ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ ДИНИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

В.И. Щербаков[1]

1 *kafmathan@mail.ru*; Московский технический университет связи и информатики

*В статье говорится, что полученный на модифицированном отрезке [0, 1] поточечный признак сходимости рядов Фурье по обобщённым системам Хаара S-признак Дини, который (для* $\sup_n p_n = \infty$*) всегда лучше V-признака Дини (признака Дини-Виленкина) при распространении его на нульмерные компактные абелевы группы становится некорректным, ибо сходимость на группе может зависеть от выбора базисных элементов.*

**Ключевые слова**: нульмерная компактная абелева группа, модифицированный отрезок [0, 1], обобщённые системы Хаара, $V$-признак Дини (признак Дини-Виленкина), $S$-признак Дини.

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, состоящая из простых чисел; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k\, (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число $n$ единственным образом можно разложить по формуле

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где $a_k, s$ и $n'$ – целые с $0 \le a_k < p_{k+1}$; $1 \le a_s < p_{s+1}$; $0 \le n' < m_s$.

Пусть G — нульмерная компактная абелева группа (группа Виленкина) с операцией $\oplus$ и обратной операцией $\ominus$ и со вложенной системой подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots \text{ и } \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\} \tag{2}$$

( $0_G$ – нулевой элемент группы G) и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок $p_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Определённая таким образом система подгрупп $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ является системой окрестностей нуля. Относительно вышеуказанной топологии определяем предел и непрерывность функции (под функцией будем понимать отображение группы G во множество комплексных чисел $\mathbb{C}$). Получилась нульмерная компактная абелева группа, которую иногда называют группой Виленкина (её определил Н.Я. Виленкин [1]).

В каждом из смежных классов $G_{n-1} \setminus G_n$ выберем по элементу $e_n\, (n = 1, 2, \ldots)$, которые назовем базисными и зафиксируем. Тогда всякую точку $x \in G$ единственным образом можно разложить по формуле

$$x = x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus x_n e_n \oplus \ldots, \tag{3}$$

где $x_k$– целые с $0 \le x_k < p_k$; для $a \in G$, по определению, $ka = \underbrace{a \oplus a \oplus \ldots \oplus a}_{k \text{ раз}}$ и $0a = 0_G$. Число $x_k$ в равенстве (3) будем называть **k-м коэффициентом** элемента $x \in G$ при его разложении по базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Можно определить отображение группы $G$ на отрезок [0, 1]:

$$x = x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus x_n e_n \oplus \ldots \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n} \tag{4}$$

с нарушением взаимной однозначности только в $\{p_n\}$ -рациональных точках (точки $x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus (x_n - 1) e_n \oplus (p_{n+1} - 1) e_{n+1} \oplus (p_{n+2} - 1) e_{n+2} \oplus \ldots \oplus (p_{n+k} - 1) e_{n+k} \oplus \ldots$ и $x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus x_n e_n \oplus 0_G \oplus \ldots \oplus 0_G \oplus \ldots$ при отображении (4) переходят в одно и то же число). Отображение (4) иногда называют отображением Монна [2, 3].

Положив $\mu(x \oplus G_n) = \frac{1}{m_n}$, по схеме Лебега определяем меру (на борелевских множествах она совпадает с мерой Хаара) и абсолютно сходящийся интеграл на $G$. За $L(G)$ обозначим множество функций, интеграл от которых по группе $G$ абсолютно сходится. Аналогично действительной прямой определяем ортогональные и ортонормированные системы функций. Рассмотрим следующую ортонормированную систему функций $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ : $\chi_0(x) \equiv 1; \chi_{m_k}(x) =$
$\begin{cases} \sqrt{m_k} \exp(\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}) & \text{, если } x \in G_k \\ 0 & \text{для } x \in G \setminus G_k \end{cases}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и

$$\chi_n(x) = \chi_{a_s m_s + n'}(x) = (\chi_{m_s}(x \ominus < \frac{n'}{m_s} >))^{a_s},$$

где $x_k$ определены в формуле (3), $s, a_s$ и $n'$– в равенстве (1), а $< \frac{n'}{m_s} >$ – "конечный" прообраз числа $\frac{n'}{m_s}$ при отображении Монна (4) (то есть все коэффициенты элемента $< \frac{n'}{m_s} >$ при его разложении по формуле (3), начиная с $(s+1)$-го, равны нулю).

Для $p_n \equiv 2$ система $\{\chi_n(x)\}_{n=o}^{\infty}$ совпадает с системой Хаара [4]; для $\sup\limits_n p_n < \infty$ она рассматривалась (на отрезке [0, 1]) Б.И. Голубовым и А.И. Рубинштейном [5]; для любых $p_n$ (также на отрезке [0, 1]) — Б.И. Голубовым [6] (Б.И. Голубов и А.И. Рубинштейн [5], а также Б.И. Голубов [6] условие простоты на числа $p_n$ не накладывали); на нульмерных компактных абелевых группах она рассматривалась С.Ф. Лукомским [7].

Известны следующие мажоранты ядер Дирихле по обобщённым системам Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ :

1. Мажоранта Виленкина ($V$-мажоранта):

$$V(x) = m_{n+1}, \text{ если } x \in G_n \setminus G_{n+1}; n = 0, 1, 2, \dots$$

(в [1] $V(x)$ обозначена как $[\frac{1}{x}]$) ;

2. $S$-мажоранта

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \text{ для } x \in G_n \setminus G_{n+1}; n = 0, 1, 2, \dots \text{ , а } x_{n+1} \text{ определены в (3)}$$

(в [8] $S(x)$ обозначена как $q(x)$).

В зависимости от мажорант ядер Дирихле, имеются и два признака сходимости Дини для рядов Фурье по обобщённым системам Хаара на нульмерных компактных абелевых группах (см., например, [9, 10]; симметричные признаки Дини, за неимением места, мы здесь не расматриваем):

**Теорема $V$ ($V$-признак Дини или признак Дини-Виленкина).** *Если справедливо условие*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \oplus t) - f(x)| V(t) dt = 0, \tag{5}$$

*то ряд Фурье по обобщённой системе Хаара от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке $x \in G$.*

**Теорема $S$ ($S$-признак Дини).** *При выполнении условия*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \oplus t) - f(x)| S(t) dt = 0, \tag{6}$$

*ряд Фурье по обобщённой системе Хаара от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке $x \in G$.*

(из этих теорем, в частности, следует, что для $\sup\limits_n p_n < \infty$ система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является системой сходимости).

К сожалению, $S$-мажоранта (а также $S$-признак Дини (в отличие от признака Дини-Виленкина)) зависит от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, и при $\sup_n p_n = \infty$ эта зависимость существенна. Имеют место следующая

**Теорема 1.** *Если* $\sup_n p_n = \infty$ *, то существует непрерывная на группе* $G$ *функция* $f(t)$ *такая, что при одном выборе базисных элементов* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *выполнено условие (6) (и, следовательно, ряд Фурье от функции* $f(t)$ *по обобщённой системе Хаара в точке x сходится), однако найдётся и иной выбор базисных элементов* $e'_n \in G_{n-1} \setminus G_n$ *(при этом обобщённая система Хаара* $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *останется той же самой, однако изменится её нумерация), относительно которой ряд Фурье по (перенумерованной) обобщённой системе Хаара от той же самой функции* $f(t)$ *и в той же самой точке* $x \in G$ *разойдётся.*

Однако при любом выборе базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ соответствующий $S$-признак Дини для $\sup_n p_n = \infty$ всегда лучше $V$-признака (который от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не зависит), ибо справедлива следующая

**Теорема 2.** *Для* $\sup_n p_n = \infty$ *при любых базисных элементах* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существует непрерывная на группе* $G$ *функция* $f(t)$ *(зависящая, вообще говоря, от базисных элементов* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$*), для которой выполнено условие (6) (и, следовательно, её ряд Фурье по обобщённой системе Хаара сходится в точке x), однако*

$$\int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \oplus t) - f(x)| V(t)\, dt \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

## Литература


1. Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормальных систем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1947. – Т. 11, № 4. – С. 363—400.

2. Monna A.F. *Analysys non-Archimedence*. — Berlin – Heidelberg – N.Y.: Springer-Verlag, 1970. – 118 p.

3. Хренников А.Ю., Шелкович В.М. *Современный p-адический анализ и математическая физика. Теория и приложения*. – М.: Физматгиз, 2012. – 452 с.

4. Haar A. *Zur Theorie des Orthogonalischen Functionsysteme* // Math. Ann. – 1910. – V. 69. – P. 331–371.

5. Голубов Б.И., Рубинштейн А.И. *Об одном классе систем сходимости* // Матем. сб., Нов. сер. – 1966. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 96–115.

6. Голубов Б.И. *Об одном классе полных ортонормальных систем* // Сиб. матем. журн. – 1968. – Т. IX, № 2. – С. 297–314.

7. Лукомский С.Ф. *О рядах Хаара на компактной нульмерной группе* // Изв. Сарат. ун-та, сер. матем., мех., информ., нов. сер. – 2009. – Т. 9, вып. 1. – С. 24–29.

8. Щербаков В.И. *О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам* // Вестн. МГУ, сер. матем. – 1983. – № 2. – С. 37–42.

9. Shcherbakov V.I. *A Majorants of the Dirichlet kernels and the Dini pointwise tests for generalized Haar systems* // Mathematical Notes. – 2017. – V. 101, № 3. – P. 542–565.

10. Щербаков В.И. *Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара* // Математические заметки. – 2017. – Т. 101, вып. 3. – С. 446–473.

ON THE VECTOR BOUNDARY VALUE RIEMANN PROBLEM ON RIEMANN SURFACE

V.I. Shcherbakov

*We show that a S-Dini test of pointwise convergence of the Fourier series for generalized Haar's systems on the modified segment [0, 1], which is always better (for unbounded sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$) than analogous V-Dini (Dini-Vilenkin) test, will be incorrect, if we want to extend it to the zero-dimensional abelian groups because the convergence on the groups may be depend of the choice of basic elements.*

Keywords: zero-dimensional group, modified segment [0, 1], generalized Haar's systems, $V$-Dini test (Dini-Vilenkin test), $S$-Dini test.

УДК 519

## О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛЯПУНОВА

З.Я. Якупов[1]

1 *zymat@bk.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ-КАИ)

*Группы преобразований являются реальными объектами окружающего мира, о присутствии и о физической структуре которых можно судить по их влиянию на наши представления. К ним относятся, например, представления об однородности и изотропности пространства и времени, о динамическом подобии явлений, о галилеевой и лоренцовой инвариантности и т. п.*

**Ключевые слова**: группы преобразований, обыкновенные дифференциальные уравнения, качественная теория, приводимость, методы сравнения.

**Введение**. Поскольку математические модели многих явлений реального мира формулируются в виде дифференциальных уравнений, то становится ясным, что одним из наиболее существенных приложений теории групп является их использование в общей теории дифференциальных уравнений [1]- [4]. Приоритет в области применения групповых методов к изучению дифференциальных уравнений принадлежит норвежскому математику С. Ли. Первоначально целью С. Ли было создание теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на столь же надежной групповой основе, какая была создана Н. Абелем для решения алгебраических уравнений. В связи с этим С. Ли сформулировал и изучил фундаментальное понятие группы (группы Ли), допускаемой данной системой дифференциальных уравнений. В настоящее время математическое направление, предметом которого является совместное рассмотрение групп преобразований и допускающих эти группы дифференциальных уравнений, получило название группового анализа дифференциальных уравнений.

**Методы**. Круг задач группового анализа дифференциальных уравнений обширен и представляет собой область приложения теории и алгоритмов этого анализа [5]- [9]. Исходные предпосылки для использования теоретико-группового подхода к изучению дифференциальных уравнений, в частности обыкновенных, заключается в следующем [10].